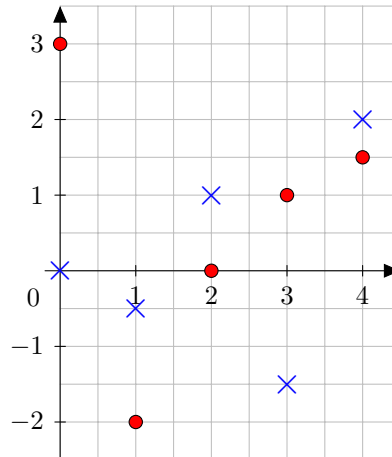




## Corrigé du Contrôle 3

### Solution de l'exercice 1.



● la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

× la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Par lecture graphique, on trouve que

$$u_0 = 3, \quad u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_4 = 1,5.$$

- On observe que dans les termes représentés graphiquement ci-dessus, seul  $u_3$  vaut 1 :  $u_3 = 1$ . Donc l'indice recherché est  $n = 3$ .
- Cette suite n'est pas croissante car  $u_1 = -2 < u_0 = 3$  mais elle n'est pas décroissante non plus car  $u_2 = 0 > u_1 = -2$ . Elle n'est donc ni croissante ni décroissante.
- En utilisant la formule avec  $n = 0, 1, 2, 3$  et  $4$ , on trouve les valeurs suivantes :

$n$	0	1	2	3	4
$v_n$	0	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-3}{2}$	2

- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est représentée dans le graphique ci-dessus par ×.
- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas croissante car  $v_1 = \frac{-1}{2} < v_0 = 0$  mais elle n'est pas décroissante non plus car  $v_2 = 1 > v_1 = \frac{-1}{2}$ . Elle n'est donc ni croissante ni décroissante.

### Solution de l'exercice 2.

- Puisque Cassandra augmente ses économies de 8 € par semaine, elle aura la semaine  $n + 1$ , 8€ de plus que la semaine  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n + 8.$$

- On constate donc que  $u_{n+1} > u_n$  et ceci pour tous les entiers  $n \in \mathbb{N}$ . Donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.



3. On suppose la tirelire de Kassandra vide avant la première semaine :  $u_0 = 0$ . Elle obtient pour la première semaine

$$u_1 = 8 \text{ €}.$$

Puis la deuxième semaine, elle a

$$u_2 = u_1 + 8 = 8 + 8 = 16 \text{ €}.$$

4. En continuant de calculer les termes de la suite, on trouve  $u_3 = 16 + 8 = 24 \text{ €}$ ,  $u_4 = 24 + 8 = 32 \text{ €}$ . Donc à la quatrième semaine, Kassandra aura gagné 32 €.
5. (*Bonus*) Lorsque Kassandra dépense ses économies lorsqu'elles atteignent 32 €, la définition de la suite devient :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8 & \text{si } u_n < 32 \\ u_{n+1} = 0 & \text{si } u_n = 32 \end{cases}$$

### Solution de l'exercice 3.

1. Par définition,  $u_0$  est le nombre de personnes de moins de 20 ans l'année  $2015 + 5 \times 0 = 2015$ . Donc d'après l'énoncé,

$$u_0 = 30000.$$

De la même façon,  $v_0$  est le nombre de personnes de plus de 60 ans l'année 2015 donc

$$v_0 = 25000.$$

2. Cinq ans plus tard, le nombre de personnes de moins de 20 ans aura augmenté de 500 personnes. On a donc

$$u_1 = u_0 + 500 = 30000 + 500 = 30500.$$

3. De la même façon, on a

$$u_2 = u_1 + 500 = 30500 + 500 = 31000,$$

$$u_3 = u_2 + 500 = 31000 + 500 = 31500,$$

$$u_4 = u_3 + 500 = 31500 + 500 = 32000.$$

4. Nous l'avons vu à travers les premiers exemples,  $u_{n+1}$  est égal à  $u_n$  (le nombre de personnes de moins de 20 cinq ans plus tôt) plus 500. C'est-à-dire

$$u_{n+1} = u_n + 500.$$

5.  $u_{n+1}$  admet 500 personnes de plus que  $u_n$  donc naturellement

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ceci étant vrai pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , on en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

6. Puisque la population de plus de 60 ans augmente de 10% tous les cinq ans, on en déduit que le nombre de **nouvelles** personnes ayant plus de 60 ans est égal à 10% de la population précédente. Pour 2020, on prend donc 10% de la population de plus de 60 ans de 2015 :

$$\frac{10}{100} \times v_0 = \frac{10}{100} \times 25000 = 2500.$$



7. Le nombre total de personnes ayant plus de 60 ans en 2020 est donc égal à la population précédente plus les 10% que l'on ajoute :

$$v_1 = v_0 + 2500 = 25000 + 2500 = 27500.$$

Notons que l'on peut retrouver ce résultat directement en appliquant une évolution de 10% à  $v_0$  :

$$v_1 = \left(1 + \frac{10}{100}\right) v_0 = (1 + 0,1) \times 25000 = 1,1 \times 25000 = 27500.$$

8. Par la formule précédente, on a

$$\begin{aligned}v_2 &= (1,1)^2 \times 25000 = 30250 \\v_3 &= (1,1)^3 \times 25000 = 33275 \\v_4 &= (1,1)^4 \times 25000 = 36602,5 \simeq 36602.\end{aligned}$$

9. Grâce aux questions 2, 3, 7 et 8, on voit que

$$u_0 > v_0, \quad u_1 > v_1 \quad u_2 > v_2$$

mais

$$u_3 < v_3 \quad u_4 < v_4.$$

Ainsi sur les premiers termes on voit que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dépasse la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à partir du rang  $n = 3$ .

10. L'indice  $n = 3$  correspond à l'année  $2015 + 5 \times 3 = 2015 + 15 = 2030$ . A partir de 2030, la population de plus de 60 ans sera plus nombreuse que la population de moins de 20 ans.
11. (*Bonus*) Dans la case B1, il faut rentrer la formule suivante :

$$= 30000 + 500 * A1$$